Math 2

Théorie des distributions

Dans tout ce chapitre on note par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

① Fonction Test :

Déf : soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
on appelle support de f et note $\operatorname{supp} f$ l'ensemble (c'est un fermé)

$$\operatorname{supp} f = \{ x \in \mathbb{R}^m / f(x) \neq 0 \}$$

Rque :

* $(\operatorname{supp} f)^c$: c'est le plus grand ouvert où $f(x) = 0$:
  : c'est une réunion de tous les ouverts où f est nulle

* $x_0 \in (\operatorname{supp} f)^c \iff$ il existe V_{x_0} : voisinage de x_0 tq
  $\forall x \in V_{x_0}, f(x) = 0$.

Exples :
$\Omega = \mathbb{R}$

* $f(x) = \sin x$, $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$
* $f(x) = \mathbb{1}_{]0,2]}(x)$, $\operatorname{supp} f = [0,2]$
* $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$: $\operatorname{supp} f = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Déf :
on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}$) l'ensemble des fonction indéfiniment dérivable où support compact (borné).
càd

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi,\ \varphi \in C^\infty \text{ et } \operatorname{supp} \varphi \text{ est un compact} \}.$$

Rq
$\mathcal{D}(\Omega)$ est un e.v : espace de fonction Test

Exple :
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) = e^{\frac{-1}{1-x^2}} \\ \quad \text{si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

mque $\varphi \in \mathcal{D}$?

① • si $|x| < 1$, φ est $\mathcal{C}^\infty$
• si $|x| > 1$, φ est $\mathcal{C}^\infty$
• $\lim_{x \to (-1)^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0 = \lim_{x \to (1)^-} e^{-\frac{1}{1-x^2}}$

$$\left(e^{\frac{-1}{1-x^2}}\right)' = \left(\frac{-1}{1-x^2}\right)' e^{\frac{-1}{1-x^2}}$$

$$= \frac{-2x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}}.$$

$$\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right)^{(k)} = F_k(x)\, e^{-\frac{1}{1-x^2}} \quad \text{où}$$

F_k : Fract rat

avec

$$\lim_{x \to (-1)^+} \left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right)^{(k)} = 0 = \lim_{x \to 1} \left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right)$$

Scanned with CamScanner

Conc: φ est $\varphi\infty$

① $\text{supp}\,\varphi =]-1,1[= [-1,1]$:
compact de $\mathbb{R}$.

Conc : φ est une fonction Test

Notation :

$\Omega = \mathbb{R}^n$

$\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

on note :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

avec $D^0 \varphi = \varphi$.

EXPL : cas $\mathbb{R}^2$

$\alpha = (1,1)$

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

$\alpha = (2,0)$

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Déf :

Soit (φ_m) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$
on dit que φ_m converge vers φ dans $\mathcal{D}$ et on note

$$\varphi_m \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{D}} \varphi$$

ssi

i/ Il existe un compact K tq
$\text{supp}\,\varphi_m \subset K$, $\forall m$:

ii/ $\forall m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\| \varphi_m^{(m)} - \varphi^{(m)} \|_\infty \longrightarrow 0.$$

cad

$$\sup_K |\varphi_m^{(m)} - \varphi^{(m)}| \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

Rque : cas : plusieurs variables

ii/ $\Leftrightarrow \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{D}^n$

$D^\alpha \varphi_m$ converge uniformément vers

$D^\alpha \varphi$

$\left(\Leftrightarrow \sup_K |D^\alpha \varphi_m - D^\alpha \varphi| \to 0 \right)$

EX :

① soient f, g deux fonction qcq
Mq $(\text{supp}\,fg) \subset \text{supp}\,f \cap \text{supp}\,g$

$A = \{x,\ f(x) \neq 0\}$

$B = \{x,\ g(x) \neq 0\}$.

on a : $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \text{et} \\ A \cap B \subset B. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap$

Scanned with CamScanner

② soit $f \in \varphi^\infty$, $\varphi \in \mathcal{D}$ } mq $(f\varphi) \in \mathcal{D}$?

- φf est $\mathcal{E}^\infty$
- $\text{supp}(f\varphi) \subset \text{supp} f \cap \text{supp}\varphi \subset \text{supp}\varphi$: compact

③ mque $\text{supp}\psi' \subset \text{supp}\varphi$ { φ est un fct Test, ψ' est un " } $\in \mathcal{E}$? $\in \mathcal{D}$?

conclure?

notons: θ : le plus grand ouvert où $\varphi(x)=0$
V : " " " " $\varphi'(x)=0$

oma: $\varphi(x)=0 \Rightarrow \psi'(x)=0$.

$\Rightarrow \theta \subset V$.

$\Rightarrow V^c \subset \theta^c$ ($\theta^c = \text{supp}\varphi$)

$\text{supp}\psi'$

$\Rightarrow \text{supp}\psi' \subset \text{supp}\varphi$

conclusion

φ et ses dérivés sont des elts de $\mathcal{D}$

② Distributions:

Déf: une dist. est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$

càd:
T est un dist

$\Leftrightarrow T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$

qui vérifie:

i/ T est linéaire:

soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

oma:

$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$

$\langle T, \lambda\varphi_1 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle$

ii/ T est continue:

soit $(\varphi_m)_m \in \mathcal{D}$ tq

$\varphi_m \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$

oma:

$\langle T, \varphi_m \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

Notation:

on note par $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Rque:

① une dist T est dite réelle ssi $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$

② toute dist peut s'écrire sur la forme

$T = R + iS$

où R et S deux dist réels

avec

pour $\varphi \in \mathcal{D}$ oma:

$\langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i \langle S, \varphi \rangle$

③ si T est une dist complexe. on définit la dist conjuguée notée $\overline{T}$ par:

$\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Scanned with CamScanner

Dém (

(Ω

④ soit

il existe

supp

on a:

$\int_{\mathbb{R}} |f($

$= \int_a^a |$

$\leq$ sup

$x \in [a$

⑤ T_f

• (ave

$\langle T_f,$

$\langle T_f$

• soit

H

$|\langle T$

$=$

$= |$

$\leq$

② soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ et λ scalaire

Alors $(T_1 + T_2)$ et (λT_1) sont des distr:

$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$\langle \lambda T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Donc $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un e.V

Déf:

① une dist T est dite positive: si

$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \varphi \geq 0$

on a $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$.

② une dist T est dite nulle sur Ω si

$\langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$.

③ $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ on a $T_1 = T_2$ sur Ω.

si $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$

④ le support d'une dist T est le complémentaire de Ω plus grand ouvert sur lequel T s'annule.

⑤ Exemples des distributions

a - dist associée à une fonct localement intégrable.

Déf:

une fonct f est dite localement intégrable sur Ω (on note $f \in L^1_{loc}(\Omega)$) si elle est intégrable sur tout compact inclu dans Ω.

(c'est à dire pour tout compact K de Ω $\int_K |f(x)| dx < +\infty$.)

Déf:

si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, Alors l'app définie par:

$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x) dx$

est une dist dite distribution régulière associée à f

Rque:

① cas $\Omega = \mathbb{R}$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

② cas $\Omega = \mathbb{R}^2$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$

$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \varphi(x,y) dx dy$

Scanned with CamScanner

Dém (EX):

$(\Omega = \mathbb{R})$

* tout fonction continues sont localement intégrable

(*) soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

il existe $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$

pour montrer localement intégrable. C'est intégr sur tout compact

on prend un intervalle quelconq

on a:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)\cdot\varphi(x)|\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} |f(x)||\varphi(x)|\,dx.$$

$$\leq \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)| \left(\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx\right)$$

$< +\infty$ car $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$< +\infty$.

(*) T_f est une dist, en effet

- (avec la linéarité de l'intégrale)

$$\langle T_f, \varphi_1+\varphi_2\rangle = \langle T_f,\varphi_1\rangle + \langle T_f,\varphi_2\rangle$$

$$\langle T_f, \alpha\varphi_1\rangle = \alpha\langle T_f,\varphi_1\rangle$$

- soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ tq $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$

M. que:

$$\langle T_f,\varphi_n\rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T_f,\varphi\rangle ?$$

$$|\langle T_f,\varphi_n\rangle - \langle T_f,\varphi\rangle|$$

$$= |\langle T_f, \varphi_n-\varphi\rangle|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n(x)-\varphi(x))\,dx\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

$$= \int_K |f(x)|\,|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \underbrace{\sup_K |\varphi_n(x)-\varphi(x)|}_{\to 0} \underbrace{\int_K |f(x)|\,dx}_{<+\infty}$$

$\to 0$.

- $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$.

↳ $\exists$ un compact K / $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$.

↳ $\forall k \in \mathbb{N}$ dérivé

$$\sup_K |\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}| \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

b - Distribution de Dirac.

Déf: soit $a\in\Omega$, la forme linéaire définie par:

$$\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

$$\varphi \mapsto \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$

est une dist dite dist de Dirac en a.

Scanned with CamScanner

④ Dérivation au sens des distributions.

Déf : on appelle dérivée d'une distribution T la distribution notée T', définie par la relation

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

App (ex 11) :

① $f(x) = |x|$, $T_{|x|} = ?$ $\overset{=S}{\Leftarrow}$

$$\langle T_{|x|}, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T'_{|x|}, \varphi(x) \rangle = - \langle T_{|x|}, \varphi'(x) \rangle$$

(déf de dérivée distrib régulière)

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi'(x) \, dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{0} (-x) \varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{+\infty} x \varphi'(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{+\infty} x \varphi'(x) \, dx.$$

IPP $\begin{cases} x \longrightarrow 1 \\ \varphi'(x) \longrightarrow \varphi(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \langle T'_{|x|}, \varphi \rangle = \underbrace{[x \varphi(x)]_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) \, dx$$

$$- \underbrace{[x \varphi(x)]_{0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, dx$$

$\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ car φ est à support compact

$$= \int_{-\infty}^{0} (-1) \varphi(x) \, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, dx$$

$$\neq \langle T_g, \varphi \rangle$$

$g = ?$

($\lim_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) = 0$ car φ à support compact)

$$= \langle T_{sig(x) = g'}, \varphi \rangle$$

avec

$$sig(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- conclusion $T'_{|x|} = T_{sig}$.

② $T_{sig} = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T_{sig}, \varphi \rangle = \langle T_{sig}, \varphi'(x) \rangle$$

$$= - \int_{-\infty}^{0} (-1) \varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x) \, dx.$$

$$= [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [\varphi(x)]_{0}^{+\infty}.$$

$$= \varphi(0) - \varphi(-\infty) - \varphi(+\infty) + \varphi(0).$$

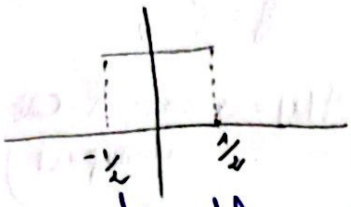
$$= 2\varphi(0) \quad \text{car } \varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) \text{ car } \varphi(x) \text{ à support compact.}$$

$$= \langle 2\delta, \varphi \rangle$$

Scanned with CamScanner

conclusion $T'_{sig} = 2\delta$.

③ $h(x) = 1\!\!1_{[-1/2, 1/2]} = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



* h n'est pas dérivable au sens de fonction car elle n'est pas continue en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

* au sens de distro :

$h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_{1\!\!1_{[-1/2,1/2]}} \in \mathcal{D}'$

— Donc $T_{1\!\!1_{[-1/2,1/2]}}$ est dérivable.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$\langle T'_{1\!\!1_{[-1/2,1/2]}}, \varphi(x) \rangle$

$= - \langle T_{1\!\!1_{[-1/2,1/2]}}, \varphi'(x) \rangle$.

$= -\int_{-1/2}^{1/2} \varphi'(x)\, dx$.

$= - [\varphi(x)]_{-1/2}^{1/2}$

$= - \varphi(\frac{1}{2}) + \varphi(-\frac{1}{2})$

$= - \langle \delta_{1/2}, \varphi \rangle + \langle \delta_{-1/2}, \varphi \rangle$.

$= \langle \delta_{-1/2} - \delta_{1/2}, \varphi(x) \rangle$.

Alors :

$T'_{1\!\!1_{[-1/2,1/2]}} = \delta_{-1/2} - \delta_{1/2}$.

$\left[T'_{1\!\!1_{[a,b]}} = \delta_a - \delta_b \right]$

$\langle T'', \varphi \rangle = \langle T', \varphi \rangle$

$= - \langle T, \varphi' \rangle$

$= (-1)^2 \langle T, \varphi'' \rangle$.

Prop.
Toute dist admet des dérivées de tout ordre qui sont aussi des distributions pour $T \in \mathcal{D}'$ on a :

$\langle T^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle, \varphi \in \mathcal{D}$

Rque :
Extension au cas de plusieurs variables

* Dans le cas de plusieurs variables on définit la dérivée de $\frac{\partial T}{\partial x}$ par :

$\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle$

* $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}$.

$\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \varphi \rangle = (-1)^2 \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \rangle$.

$= \langle T, \delta$

Scanned with CamScanner

(*) pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$.

$|\alpha| = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$.

on a:

$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$.

App (Ex 14):

$H(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

fonction Heaviside sur $\mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a:

$\left\langle \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \varphi(x,y) \right\rangle$

$= (-1)^2 \left\langle H, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle$.

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx \right) dy$.

$= \int_0^{+\infty} \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy$.

$= -\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,y)\, dy$

(car φ est a support bornée)

(2)

$= -\left[\varphi(0,y) \right]_{y=0}^{y=+\infty}$

$= \varphi(0,0)$

$= \langle \delta_{(0,0)}, \varphi(x,y) \rangle$.

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta_{(0,0)}$.

Exemples:

a- Dérivée de la fonction Heaviside sur $\mathbb{R}$.

$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(au sens de fonction = H n'est pas dérivable en zéro)

(*) $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow T_H \in \mathcal{D}'$ donc elle est dérivable et on a

$T'H = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\langle T'_H, \varphi(x) \rangle = -\langle T_H, \varphi'(x) \rangle$

$= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx$.

$= -\left[\varphi(x) \right]_0^{+\infty}$ ($\varphi(+\infty) = 0$ car φ est a support compact)

$= \varphi(0)$

$= \langle \delta, \varphi \rangle$.

$\Rightarrow T'H = \delta$.

Scanned with CamScanner

b. Dérivée de la dist de Dirac.

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ ona:

- $\langle \delta ; \varphi \rangle = -\langle \delta , \varphi'(x) \rangle$
  $= -\varphi'(0)$.
- $\langle \delta'_a , \varphi \rangle = -\varphi'(a)$.
- $\langle \delta_a^{(n)} , \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta_a , \varphi^{(n)} \rangle$
  $= (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$.

c. Dérivée d'une fonction discontinue.

Théorème (Formule des sauts).

soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\})$.

avec

$f(a_k^+) = \lim_{x \to a_k^+} f(x)$

et

$f(a_k^-) = \lim_{x \to a_k^-} f(x)$.

existante et sont finis

$\forall k \in \{1 .. m\}$.

Alors.

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^{m} \left(f(a_k^+) - f(a_k^-) \right) \delta_{a_k}$$

App (Ex 12).

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

① f est $\mathcal{C}$ par morceaux donc elle est loc intég sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow T_f$ est une dist

② $T_f \in \mathcal{D}'$ donc elle est dérivable et ona:

$T'_f = ?$.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0,1\})$ avec

$f(0^+) = 0$; $f(0^-) = 1$

$f(1^+) = 2$; $f(1^-) = 1$.

Avec la formule des sauts ona.

$$T'_f = T_{f'_1} + |f(0^+) - f(0^-)| \delta + |f(1^+) - f(1^-)| \delta_1$$

$$= T_{f'_1} - \delta + \delta_1$$

avec $f'_1(x) = \begin{cases} -\sin x & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$

l'expression explicite de $T_{f'_1}$:

pour $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle T'_f , \varphi \rangle = \langle T_{f'_1} , \varphi \rangle - \langle \delta , \varphi \rangle + \langle \delta_1 , \varphi \rangle.$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -\sin x \, \varphi(x) \, dx + \int_0^1 \varphi(x) \, dx + 2 \int_1^{+\infty} \varphi(x) \, dx - \varphi(0) + \varphi(1)$$

Scanned with CamScanner

(*) pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$.

$|\alpha| = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}$.

on a :

$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$.

App (Ex 14) :

$H(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

fonction Heaviside sur $\mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a :

$\left\langle \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \varphi(x,y) \right\rangle$

$= (-1)^2 \left\langle H, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle$.

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx \right) dy$.

$= \int_0^{+\infty} \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy$.

$= -\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,y)\, dy$

(car φ est à support bornée)

(5)

$= -\left[\varphi(0,y) \right]_{y=0}^{y=+\infty}$

$= \varphi(0,0)$

$= \langle \delta_{(0,0)}, \varphi(x,y) \rangle$.

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta_{(0,0)}$.

Exemples.

a- Dérivée de la fonction Heaviside sur $\mathbb{R}$.

$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(au sens de fonction = H n'est pas dérivable en zéro)

(*) $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow T_H \in \mathcal{D}'$ donc elle est dérivable et on a

$T'_H = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\langle T'_H, \varphi(x) \rangle = -\langle T_H, \varphi'(x) \rangle$

$= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx$.

$= -\left[\varphi(x) \right]_0^{+\infty}$ ($\varphi(+\infty) = 0$ car φ est à support compact)

$= \varphi(0)$

$= \langle \delta, \varphi \rangle$.

$\Rightarrow T'_H = \delta$.

Scanned with CamScanner

(5)

$T''_g = T_{g''} + \delta + \delta_1 - \delta' + \delta'_1$.

ou $g''(x) = \begin{cases} -\cos x & x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

pour $\varphi \in D$ on a.

$\langle T''_g, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{0} \cos x \varphi(x) + \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi'(0) - \varphi'(1)$

$T''_g = (T'_g)'$

$= (T_{g'} - \delta + \delta_1)'$

$= T'_{g'} - \delta' + \delta'_1$

$g' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0,1\})$.

$g'(0^+) = 1$; $g'(0^-) = 0$.

$g'(1^+) = 2$; $g'(1^-) = 1$.

avec formule des sauts.

$T'_{g'} = T_{g''} + \delta + \delta_1$.

avec

$g''(x) = \begin{cases} -\cos x & x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\to T_{g'}$

Ainsi

(6)

Ex 13 :

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$ on a :

1/ Définition de dérivée

$\langle DT, \varphi \rangle = \langle \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4\frac{\partial}{\partial x}\right) T, \varphi(x) \rangle$

$= \langle -T'' + 4T', \varphi(x) \rangle$

$= -\langle T'', \varphi \rangle + 4\langle T', \varphi \rangle$

$= (-1)^2 \langle T, \varphi''(x) \rangle - 4\langle T, \varphi'(x) \rangle$

$= -\int_{-\infty}^{a} g(x)\varphi''(x)dx - \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi''(x)dx$

$- 4\int_{-\infty}^{a} g(x)\varphi'(x)dx - 4\int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi'(x)dx$

IPP : $g(x) \to g'(x)$ $\quad \varphi \to \varphi'$

$\varphi'' \to \varphi$ $\quad \varphi'' \to \varphi$

$\varphi \to \varphi'$ $\quad \varphi \to \varphi'$

$\varphi' \to \varphi$ $\quad \varphi' \to \varphi$.

$= -[g(x)\varphi'(x)]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} g'(x)\varphi'(x)dx$

$- [g(x)\varphi'(x)]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi'(x)dx$

$- 4[g(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a} + 4\int_{-\infty}^{a} g'(x)\varphi(x)dx$

$- 4[g(x)\varphi(x)]_{a}^{+\infty} + 4\int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi(x)dx$

$= -g(a)\varphi'(a) + g(a)\varphi'(a) - 4g(a)\varphi(a)$

$+ 4g(a)\varphi(a) + [g'(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a} =$

$\int_{-\infty}^{a} g''(x)\varphi(x)dx + [g'(x)\varphi(x)]_{a}^{+\infty} -$

$-g(a)\varphi(a)$

$\int_{a}^{+\infty} g''(x)\varphi(x)dx + 4\int_{-\infty}^{a} g'(x)\varphi(x)dx$

$+ 4\int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi(x)dx$

Scanned with CamScanner

$= -\psi'(a)\underbrace{[g(a)-g(a)]}_{=0} - \psi(a)[f(a)-g(a)] + \psi(a)\underbrace{[f(a)-g'(a)]}_{=5}$

$+ \int_{-\infty}^{a} \underbrace{(4g'(x)-g''(x))}_{=Dg=0}\psi(x)\,dx$

$+ \int_{a}^{+\infty} \underbrace{(4g'(x)-g''(x))}_{=Dg=0}\psi(x)\,dx$

$= -\psi'(a) + \psi(a)$

$= \langle \delta_a, \psi(x)\rangle - \langle \delta_a, \psi'(x)\rangle$

$= \langle \delta_a, \psi(x)\rangle + \langle \delta'_a, \psi(x)\rangle$

$= \langle \delta_a + \delta'_a, \psi(x)\rangle$

$\Rightarrow DT = \delta_a + \delta'_a$.

⑤ Opérations sur les distributions:

Déf: Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ← l'ensemble des distributions et $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Alors (gT) est une distribution définie par:

$\langle gT, \psi\rangle = \langle T, g\psi\rangle$, $\psi \in \mathcal{D}$

App (Ex 9):

1/ $\psi\delta = ?$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}$ on a $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, $\delta \in \mathcal{D}'$

$\Rightarrow \psi\delta \in \mathcal{D}'$

$\langle \psi(x)\delta, \psi(x)\rangle = \langle \delta, \psi(x)\psi(x)\rangle$

$= \psi(0)\psi(0)$

$= \psi(0)\langle \delta, \psi\rangle$

$= \langle \psi(0)\delta, \psi\rangle$

Alors

$\boxed{\psi\delta_0 = \psi(0)\delta}$

$x\delta \in \mathcal{D}'$ car $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$

$\delta \in \mathcal{D}'$

$\Rightarrow x\delta \in \mathcal{D}'$

$\boxed{x\delta = 0}$

$\begin{cases} e^x\delta = \delta \\ \cos\delta = \delta \end{cases}$

Propo

Soit $T \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{C}^\infty$

Alors la dist (gT) est dérivable et on a:

$(gT)' = g'T + gT'$

App (Ex 10):

Soit $\psi \in \mathcal{D}$ on a:

$\langle gT', \psi\rangle = \langle T', g\psi\rangle$

$= -\langle T, (g\psi)'\rangle$

$= -\langle T, g'\psi + g\psi'\rangle$

$= -\langle T, g'\psi\rangle - \langle T, g\psi'\rangle$

$= -\langle gT, \psi\rangle - \langle gT, \psi'\rangle$

$= \langle gT, \psi\rangle + \langle (gT)', \psi\rangle$

$= \langle (gT)' - gT, \psi\rangle$

Scanned with CamScanner

② $T_H \in \mathcal{D}'$

$x \mapsto \sin x$ est φ^∞

$\Rightarrow \sin x\, T_H \in \mathcal{D}'$ donc elle est dérivable.

on a : $(\sin x\, T_H)'$

$= (\sin x)' T_H + \sin x\, T_H'$.

$= \cos x\, T_H + \sin x\, \delta$.

$= \cos x\, T_H + \sin(0)\delta$ (dist. régulière)

$= \cos x\, T_H$.

$T_g = \delta$

* $(\cos x\, T_H)' = -\sin x\, T_H + \cos x\, T_H'$.

$= -\sin x\, T_H + \cos x\, \delta$

$= -\sin x\, T_H + \delta$.

* $\left(\sin(\pi x)\, 1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right)' = ?$

$\in \mathcal{D}'$

$1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \in L^1_{loc} \Rightarrow T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} \in \mathcal{D}'$

$x \mapsto \sin(\pi x)$ est φ^∞.

$\Rightarrow \sin(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} \in \mathcal{D}'$

* $\left(\sin(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}\right)'$

$= \pi \cos(\pi x) T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} + \sin(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}'$

$= \pi \cos(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} + \sin(\pi x)\left[\delta_{\frac{1}{2}} - \delta_{-\frac{1}{2}}\right]$

① $T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}' = T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}$

$= 0 + (0-1)\delta_{\frac{1}{2}}$

$= (1-0)\delta_{-\frac{1}{2}}$

$= \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}$.

$= \pi \cos(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} + \sin(-\frac{\pi}{2})\delta_{\frac{1}{2}}$

$- \sin(\frac{\pi}{2})\delta_{\frac{1}{2}}$.

$= \pi \cos(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} - \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}$

$\langle (\sin(\pi x)\, T_{1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}})', \varphi \rangle$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi \cos(\pi x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(-\frac{1}{2}) - \varphi(\frac{1}{2})$

Prop : $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ et $g_1, g_2 \in \varphi^\infty$

on a :

1) $(g_1 + g_2) T_1 = g_1 T_1 + g_2 T_1$

2) $(g_1 \cdot g_2) T_1 = g_1 (g_2 T_1)$

3) $g_1 (T_1 + T_2) = g_1 T_1 + g_1 T_2$.

Déf : soit $T \in \mathcal{D}'$

Notons :

$(\tau_a f)(x) = f(x-a)$

$(h_a f)(x) = f(ax)$

$\check{f}(x) = f(-x)$

Alors on a :

* $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$

$\varphi \in \mathcal{D}$.

Scanned with CamScanner

* $\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{1/a} \varphi \rangle$

* $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$

— Démonstration

App (Ex 16) :

1) soit $\varphi \in D$ on a :

$\langle U, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle + \langle T, \check{\check{\varphi}} \rangle$

$= \langle T, \check{\varphi} \rangle + \langle T, \varphi \rangle$

$= \langle U, \varphi \rangle$

— Donc U est paire

* $\langle V, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle - \langle T, \check{\check{\varphi}} \rangle$

$= \langle T, \check{\varphi} \rangle - \langle T, \varphi \rangle$

$= -(\langle T, \varphi \rangle - \langle T, \check{\varphi} \rangle)$

$= -\langle V, \varphi \rangle$

impaire

Ex 17 :

$f(x,y) = x + iy$

localement intégrable

— Donc c'est une distribution

$\frac{1}{x+iy}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$

$\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{f(x,y)} \right), \varphi(x,y) \rangle$

$= \langle \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{f(x,y)} \right), \varphi(x,y) \rangle$.

$= -\frac{1}{2} \langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,y) \rangle - \frac{i}{2}$.

$\langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x,y) \rangle$.

$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+iy} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} dx dy$

$-\frac{i}{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+iy} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} dx dy$.

$= -\frac{1}{2} \iint \frac{x - iy}{x^2+y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy - \frac{i}{2}$

$\iint \frac{x - iy}{x^2+y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy$

$= -\frac{1}{2} \iint \frac{1}{x^2+y^2} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy$

$+ \frac{i}{2} \iint \frac{1}{x^2+y^2} \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy$

posons :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$dx dy = r dr d\theta$.

$\Rightarrow dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta$.

$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr d\theta$.

$= r dr d\theta$.

Notons $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin\theta$.

$\Rightarrow r \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

$$= -y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

A faire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right), \varphi \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} r\, dr\, d\theta - \frac{i}{2\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta} r\, dr\, d\theta.$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\tilde{\varphi}(r,0)\right]_{r=0}^{r=+\infty} d\theta.$$

$$- \frac{i}{2\pi}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right), \varphi \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} r\, d\theta\, dr.$$

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} r\, dr\, d\theta.$$

$$\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\tilde{\varphi}(r,0)\right]_{r=0}^{r=+\infty} d\theta - \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \left[\tilde{\varphi}(r,0)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(0,\theta)\, d\theta - \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \left[\tilde{\varphi}(r,2\pi) - \tilde{\varphi}(r,0)\right] dr$$

$\varphi(r,0)$ — $\varphi(r,0)$ = 0

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(0,0)\, d\theta.$$

$$= \frac{\varphi(0,0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\varphi(0,0)}{2\pi} \times 2\pi = \pi \varphi(0,0).$$

$$= \pi \langle \delta_{(0,0)}, \varphi(x,y) \rangle$$

$$= \langle \pi \delta_{(0,0)}, \varphi(x,y) \rangle.$$

conclusion :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \pi \delta$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ex 15 :

$$u(x,t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } t^2 - x^2 \geq 0,\ t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) u est continue par morceaux

$\Rightarrow u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$

donc $T_u (= u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2) $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$Pu = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\langle Pu, \varphi(x,t) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \varphi(x,t) \right\rangle$$

$$= \left\langle u(x,t), \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} \right\rangle - \left\langle u(x,t), \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \right\rangle$$

Scanned with CamScanner

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{|x|}^{+\infty} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)\,dt\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,t)\,dx \Big]_{t=|x|}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-t}^{t} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dx\,dt$$

$$t^2 - x^2 \geq 0$$
$$t^2 \geq x^2$$
$$\forall t \geq |x|$$

$$t^2 - x^2 \geq 0$$
$$x^2 \leq t^2$$
$$x \in [-t, t]$$
$$t \geq 0$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\Big]_{t=|x|}^{t=+\infty} dx - \alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dx\,dt$$

$$= -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,|x|)\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,-x)\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x)\,dx$$

$x = -x$

$$- \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x,x)\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x)\,dx -$$

$$\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t)\,dt +$$

$$\varphi(t,t) \Big]_{t=0}^{+\infty} - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\varphi(0,0) = 0$$

Posons :

$$\star\ \phi_1(u) = \varphi(u,u)$$
$$\phi_1'(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\star\ \phi_2(u) = \varphi(-u,u)$$
$$\phi_2'(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$= -\alpha \int_0^{+\infty} \phi_1'(u)\,du - \alpha \int_0^{+\infty} \phi_2'(u)\,du$$
$$= -\alpha \Big[\phi_1(u)\Big]_0^{+\infty} - \alpha \Big[\phi_2(u)\Big]_0^{+\infty}$$
$$= \alpha\,\phi_1(0) + \alpha\,\phi_2(0)$$
$$= \alpha\,\varphi(0,0) + \alpha\,\varphi(0,0)$$
$$= 2\alpha\,\varphi(0,0).$$

Scanned with CamScanner

$= 2\alpha\, \varphi(0,0)$

$= 2\alpha \langle \delta_{(0,0)}, \varphi(x,t) \rangle$

$= \langle 2\alpha\, \delta_{(0,0)}, \varphi(x,t) \rangle$

Conclus:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y = 2\alpha\, \delta_{(0,0)}$$

3) on prend $t = vt$

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\partial x^2}\right) y = 2\alpha\, \delta_{(0,0)}^{(x,vt)}$$

avec

$\langle \delta_{(0,0)}^{(x,vt)}, \varphi(x,t) \rangle$

$= \frac{1}{v} \langle \delta_{(0,0)}^{(x,t)}, \varphi(x, \frac{t}{v}) \rangle$

$= \frac{1}{v} \langle \delta_{(0,0)}^{(x,t)}, \varphi(x,t) \rangle$

$= \frac{1}{v} \varphi(0,0)$.

$= \frac{1}{v} \varphi(0, \frac{0}{v})$

$= \frac{2\alpha}{v} \delta_{(0,0)}^{(x,t)}$.

Donc on prend $\alpha = \frac{v}{2}$.

- les bornes de l'intégrale.
- Et finalement l'intégrale largeur fois hauteur.

Changement de variable complexe (x^2+y^2 et x...) | coordonnée polaire ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

⑥ convergence [illegible] des distributions.

Déf:

Soit $(T_m)_m$ une suite de distribution, on dit que T_m converge vers la distr T

si

$\forall \varphi \in D$ on a:

$\lim_{+\infty} \langle T_m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

et on note

$T_m \xrightarrow[+\infty]{D'} T$

Expl:

calculer $\lim_{k \to +\infty} \delta_k = ?$

soit $\varphi \in D$ on a

$\lim_{k \to +\infty} \langle \delta_k, \varphi(x) \rangle$

$= \lim_{k \to +\infty} \varphi(k)$

$= 0$ car φ est à support compact

Donc

$\delta_k \xrightarrow[+\infty]{D'} 0$

Scanned with CamScanner

App: calculer (dans $\mathcal{D}'$)

1. $\lim_{m\to+\infty} m\left(\delta_{\frac{1}{m}} - \delta_{-\frac{1}{m}}\right)$

2. $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2}\left(\delta_{2m} + \delta_{-2m} - 2\delta\right)$

3. $\lim_{+\infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2x^2}$

4. $\lim_{+\infty} T_{\sin(mx)}$

correction: soit $\varphi \in \mathcal{D}$.

1) $\lim_{m\to+\infty} \left\langle m\left(\delta_{\frac{1}{m}} - \delta_{-\frac{1}{m}}\right), \varphi(x)\right\rangle$

$= \lim_{m\to+\infty} m\left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{m}\right)\right)$

$\lim_{m\to+\infty}(\varphi(0) - \varphi(0)) = +\infty \times 0$ F.I

D.L.E

$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi^{(3)}(0) + \dots$

$= \lim_{m\to+\infty} m\left[\varphi(0) + \frac{1}{m}\varphi'(0) - \varphi(0) + \frac{1}{m}\varphi'(0)\right]$

$= \lim_{m\to+\infty} m\left[\frac{2}{m}\varphi'(0)\right]$

$= 2\varphi'(0)$

$= 2\langle \delta_0, \varphi'(x)\rangle$

$= -2\langle \delta', \varphi\rangle$

$= \langle -2\delta', \varphi\rangle$

Alors

$\lim_{+\infty} m\left(\delta_{\frac{1}{m}} - \delta_{-\frac{1}{m}}\right) = -2\delta'$

2)

$\lim_{m\to0} \left\langle \frac{1}{m^2}\left(\delta_{2m} + \delta_{-2m} - 2\delta\right), \varphi\right\rangle$

$= \lim_{0} \frac{1}{m^2}\left(\varphi(2m) + \varphi(-2m) - 2\varphi(0)\right)$

$= \lim_{0} \frac{1}{m^2}\left[\varphi(0) + 2m\varphi'(0) + \frac{(2m)^2}{2}\varphi''(0) + \varphi(0)\right.$

$\left. + 2m\varphi'(0) + \frac{(-2m)^2}{2}\varphi''(0) + 2\varphi(0)\right]$

$= \lim_{m\to0} \frac{1}{m^2}\left[4m^2\varphi''(0)\right]$

$= 4\varphi''(0)$

$= 4\langle \delta, \varphi''(x)\rangle = \langle 4\delta'', \varphi\rangle$

$\Rightarrow \frac{1}{m^2}\left(\delta_{2m} + \delta_{-2m} - 2\delta\right) \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}'} 4\delta''$

3)

$\left\langle \frac{m}{\sqrt{\pi}} T_{e^{-m^2x^2}}, \varphi(x)\right\rangle$

$= \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2}\varphi(x)\,dx$

$\downarrow$ $y = mx$.

$dy = m\,dx$.

$= \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{m}\right)\frac{dy}{m}$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{x}{m}\right)dy$.

$= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{x}{m}\right)dy$.

TCD $= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{+\infty}\left(e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{m}\right)\right)dy$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi(0)\,dy$.

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy$. (intégrale de gauss, $= \sqrt{\pi}$)

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(0)\sqrt{\pi}$

$= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$.

Scanned with CamScanner

TCD:

- $y \longmapsto e^{-\gamma x^2}\varphi\left(\frac{y}{m}\right)$ est une suite de fonct intégrable.
- $e^{-\gamma x^2}\varphi\left(\frac{x}{m}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \varphi(0)e^{-\gamma x^2}$ intégrable.
- $\left|e^{-\gamma x^2}\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot e^{-\gamma x^2}$: intégrable.

(m) dans l'intégrale tend vers $+\infty$

4) $\lim_{+\infty} \langle \sin(mx), \varphi(x)\rangle$

$= \lim_{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(mx)\,\varphi(x)\,dx.$

changement de variable

$mx = y.$

$dy = m\,dx$

$= \lim_{m\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(y)\,\varphi\left(\frac{y}{m}\right)dy.$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$,

$a \in \mathbb{R}$

$\langle \sin(mx), \varphi(x)\rangle = \int_{-a}^{a} \sin(mx)\,\varphi(x)\,dx$

IPP: $\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x)$

$\sin(mx) \longrightarrow -\frac{1}{m}\cos(mx)$

$= \left[-\frac{1}{m}\cos(mx)\,\varphi(x)\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{m}\int_{-a}^{a} \cos(mx)\varphi'(x)\,dx$

Alors.

$|\langle \sin(mx), \varphi(x)\rangle| \leq \frac{1}{m}\int_{-a}^{a} |\cos(mx)||\varphi'(x)|\,dx$

$\leq \frac{1}{m} \sup_{[-a,a]} |\varphi'(x)| \underbrace{\int_{-a}^{a} dx}_{=2a}$

$\downarrow m\to+\infty.$

0

Alors

$\sin(mx) \xrightarrow[+\infty]{\text{dans } \mathcal{D}'} 0$

Propo convergence de dérivée:

Soit (T_m) une suite de dist qui converge vers la dist T.

Alors la suite $(T_m')_m$ converge vers T'

Exple:

soit la suite:

$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{m}$

f_m converge vers zéros mais au sens de fonction la suite $(f_m') = (\cos(mx))_m$ diverge

mais au sens de dist

$\cos(mx) \xrightarrow[+\infty]{\text{dans } \mathcal{D}'} 0.$

7/ Produit convolution des distributions:

Déf: on définit le produit de convolution de deux dist S et T (si elle existe) par:

$\langle S*T, \varphi\rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$

où S_x (resp T_y) désigne que la dist S s'applique qu'a la variable x.

(resp T s'applique à la variable y)

Scanned with CamScanner

Exple:
Calculer $\delta_a * \delta_b = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle$

$= \langle \delta_{a,x}, \langle \delta_{b,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$\langle \delta_a(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(a)$

$= \langle \delta_{a,x}, \varphi(x+b) \rangle$

$= \varphi(a+b)$

$= \langle \delta_{a+b}, \varphi(x) \rangle$.

$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Propriété:

1/ $S * T = T * S$

2/ $T * \delta = \delta * T = T$
(cad δ : c'est l'element neutre de $*$)

3/ $(T * S)' = T' * S$
$= T * S'$

Cas général:

* $(T * S)^{(n)} = T^{(n)} * S$
$= T * S^{(n)}$

* $D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S$
$= T * D^\alpha S$.

Ex1:
Mque $\delta_a * T = \tau_a T$?

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$

$\langle \delta_a * T, \varphi \rangle$

$= \langle T * \delta_a, \varphi \rangle$

$= \langle T_x, \langle \delta_{a,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \langle T_x, \varphi(x, a) \rangle$

$= \langle T_x, \tau_{-a} \varphi(x) \rangle$

$= \langle \tau_a T, \varphi \rangle$ (*) (-) x lorsque on fait la permutation

Ex2:
-Calculer

i/ $\delta' * T_{H(x)}$

2i/ $\delta' * T_{\sin x H(x)}$.

3i/ $(\delta' + T_H)' * T_{\cos H(x)}$.

reponse:

1/ $\delta' * T_H = (\delta * T_H)'$ ← elt neutre
$= T_H' = \delta$.

2i/ $\delta' * T_{\sin H(x)}$
$= (\delta * T_{\sin H(x)})'$

$= \left(T_{\sin x H(x)}\right)'$

$= (\sin x\, T_H)'$

$= (\sin x)' T_H + \sin x\, T_H'$

$= \cos x\, T_H + \sin x\, \delta$

$= \cos x\, T_H + \sin(0)\, \delta_a$.

$T_{\sin x H(x)} = \sin x\, T_{H(x)}$
$= \sin(x)\, H(x)$

Scanned with CamScanner

- $\cos x \in T$
- $T \cos x \; H(x)$

Exple :
- calculer le produit de convolution
$H(x) * x^n H(x) = ?$ (on veut le résultat)

$\langle H(x) * x^n H(x), \varphi(x) \rangle$

$= \langle H(x), \langle x^n H(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^n \varphi(x+y) \, dy \, dx$

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x+y) \, dy \right) x^n \, dx$

Poser
$t = x + y \Rightarrow dt = dy$

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt \right) x^n \, dx$

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \varphi(t) \, dx \right) x^n \, dt$

$= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left(\int_0^t x^n \, dx \right) dt$

$= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^t dt$

$= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \frac{t^{n+1}}{n+1} dt$

$= \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} \varphi(t) \, dt$

$= \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n+1)}(t) \, dt$

$= \frac{1}{n+1} \left[\varphi^{(n)}(t) \right]_{t=0}^{t=+\infty}$

$= \frac{1}{n+1} \varphi^{(n)}(0)$

$= \frac{1}{n+1} \delta^{(n)}(x)$

Scanned with CamScanner

$= \cos x\, TH$

$= T_{\cos x}\, H(x)$

Exples :

- calculer le produit de convolution.

$H(x) * x^2 H(x) = ?$ (au sens de Dist)

$\langle H(x) * x^2 H(x), \varphi(x) \rangle$

$= \langle H(x), \langle y^2 H(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x+y)\, dy\, dx$

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x+y)\, dy \right) dx$

Posons

$\psi(y) = \int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x+y)\, dx$

$\psi'(y) = \frac{d\psi}{dy} = \langle H', \psi(y) \rangle$

$= \left(\int_0^{+\infty} x^2 \varphi'(x+y)\, dx \right)$

$= \int_0^{+\infty} x^2 \varphi'(x+y)\, dx$

$\frac{dE}{dy} = (x+y)^2 \varphi(x+y) + \frac{dE}{dy} (x+y)$

$\psi'(y) = \int_0^{+\infty} x^2 \varphi'(x+y)\, dx$

$= \int_0^{+\infty} x^2 \frac{d\varphi}{dx}(x+y)\, dx$

$= [x^2 \varphi(x+y)]_{x=0}^{+\infty} - \dots$

$= -\varphi(y)$

Scanned with CamScanner

$= \int_0^{+\infty} y^2 \varphi(y)\, dy$

IPP : $\varphi(y) \to \varphi'(y)$

$y^2 \to \frac{1}{3} y^3$.

$= \left[\frac{1}{3} y^3 \varphi(y) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 \varphi'(y)\, dy$

$\varphi(+\infty) = 0$ (support compact)

$= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 \varphi(y)\, dy$.

$= \langle T_{\frac{1}{3} x^3 H(x)}, \varphi(x) \rangle$.

8) Transformée de Fourier des distributions.

a/ l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R})$:

Déf : on appelle espace de Schwartz, noté $S(\mathbb{R})$ l'ensemble donné par :

$$S(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ on a } \lim_{|x| \to +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = 0 \}.$$

Propriétés :

- S est un $\mathbb{C}$-ev.
- S est stable par T_τ ($\text{si } \varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$)
- S est stable par $*$ ($\text{si } \varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 * \varphi_2 \in S$).
- S est stable par dérivation. ($\text{si } \varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$)

stable par multiplication

$$\left(\begin{matrix} \varphi_1 \in S \\ \varphi_2 \in S \end{matrix} \right\} \Rightarrow \varphi_1 \varphi_2 \in S \Big).$$

- S est stable par polynôme

$$\left(\begin{matrix} \varphi \in S \\ P : \text{poly} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\varphi \in S \Big)$$

exple :

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \in S(\mathbb{R})$.

$x^m \frac{1}{1+x^2} \not\to 0$.

ssi $m < 2$.

- $f(x) = e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

$f(x) = e^{-|x|} \notin S(\mathbb{R})$

$|x|$

b- Transformée de Fourier dans S

Déf° distribution tempérée :
on appelle dist tempérée une forme linéaire et continue sur l'espace de Schwartz S et on note $S'(\mathbb{R})$ l'ensemble des dist tempérées

$\Rightarrow T \in S'$

$\Leftrightarrow T : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$

$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

- linéaire
- continue

$S \subset D'$

Scanned with CamScanner

Déf: toute dis Tempéré admet transformée de Fourier noté $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ qui est également une dist tempérée et elle est définie par:

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Appe

Calculer la T.F de:

i/ δ

ii/ $e^{2i\pi a x}$

3i/ $\cos(x)$.

* au sens de fonct des fonctions n'admet pas de transformation de Fourier pour admet la transformation de Fourier, il faut que absolument intégrable

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi a x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \, dx = +\infty$

Réponse:

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

i/ $\langle \hat{\delta}, \varphi(x) \rangle$.

$= \langle \delta, \hat{\varphi}(x) \rangle$.

$= \hat{\varphi}(0)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \langle T_1, \varphi \rangle$.

2i/ $\langle \mathcal{F}(e^{2i\pi a x}), \varphi(x) \rangle$

$= \langle e^{2i\pi a x}, \hat{\varphi}(x) \rangle$.

$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi a x} \hat{\varphi}(x)\, dx$ ou φ est $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier φ est continue en a.

$= \varphi(a)$

Les fonct $\notin$ dist Tempérée ne donne pas

Transformée de Fourier inverse

$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

$= \int_{-\omega}^{\omega} \hat{f}(t) e^{2i\pi t} dt$

$= f(x)$

3i/ $\langle \delta(\cos x), \varphi(x) \rangle = ?$.

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

$\mathcal{F}(\cos x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})\right)$.

$= \frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$.

Prop

Soit $T \in \mathcal{S}'$ on a:

1/ $\mathcal{F}(T^{(k)}) = (2i\pi x)^k \hat{T}$

2i/ $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2i\pi a x} \hat{T}$

3i/ $\mathcal{F}(h_a T) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(T)\left(\frac{x}{a}\right)$.

4i/ la T.F d'une dist paire (resp impaire) est paire (resp impaire)

5i/ $\left(\mathcal{F}(T)\right)^{(k)} = \mathcal{F}\left((-2i\pi t)^k T\right)$.

Démo

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ on a:

i/ $\langle \mathcal{F}(T^{(k)}), \varphi(x) \rangle$.

$= \langle T^{(k)}, \hat{\varphi}(x) \rangle$.

$= (-1)^k \langle T, (\hat{\varphi}(x))^{(k)} \rangle$.

$= (-1)^k \langle T, \mathcal{F}((2i\pi t)^k \varphi(t)) \rangle$

$= (-1)^k \langle \mathcal{F}(T), (-2i\pi t)^k \varphi(t) \rangle$

Scanned with CamScanner

$= \langle (2i\pi t)^k \hat{T}, \varphi \rangle$.

$\left(\hat{f}(x)\right)^{(k)} = \mathcal{F}\left((-2i\pi t)^k f(t)\right)$.

5i/

$\langle (\mathcal{F}(T))^{(k)}, \varphi(x) \rangle$

$= (-1)^k \langle \hat{T}, (\varphi(x))^{(k)} \rangle$.

$= (-1)^k \langle T, \bar{\mathcal{F}}\left((\varphi(t))^{(k)}\right)(x) \rangle$.

$= (-1)^k \langle T, (2i\pi x)^k \hat{\varphi}(x) \rangle$

$= \langle (-2i\pi x)^k T, \hat{\varphi}(x) \rangle$.

$= \langle \bar{\mathcal{F}}((-2i\pi x)^k T), \varphi \rangle$.

Théorème (admis)

Soient T_1, T_2 2 dist tempérés à support compact alors.

$\mathcal{F}(T_1 * T_2) = \hat{T}_1 \hat{T}_2$

Théo

L'app $T\mathcal{F}$ est continue et bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans même et notée par $\mathcal{F}^{-1}$ ou $\bar{\mathcal{F}}$ la T.F inverse et on a:

$\bar{\mathcal{F}}^{-1}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}^{-1}T = T$

$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$

App 8

1°/ Calculer la T.F de δ_a, $a \in \mathbb{R}$.

2°/ Déduire la dist tempérée sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ pour trouver facilement sa T.F

3/ En déduire la T.F de la dist $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

Rappel

1/ Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a:

$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi}(x) \rangle$.

$= \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi at} dt$

$= \langle e^{-2i\pi ax}, \varphi(x) \rangle$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2i\pi ax}$.

2/ $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{-a,a\})$ avec

$f(a^+) = 0$, $f(a^-) = 1$

$f(-a^+) = 1$; $f(-a^-) = 0$.

avec la formule de sauts.

$f' = 0 + (0-1)\delta_a + (1-0)\delta_{-a}$.

$= -\delta_a + \delta_{-a} = \delta_{-a} - \delta_a$

on a:

$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}'_{[-a,a]}\right) = \mathcal{F}(\delta_{-a}) - \mathcal{F}(\delta_a)$

$(2i\pi x)\,\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}} = e^{2i\pi ax} - e^{-2i\pi ax}$.

$\Rightarrow \widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}} = \dfrac{e^{2i\pi ax} - e^{-2i\pi ax}}{2i\pi x}$.

$= \dfrac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$.

Scanned with CamScanner

en particulier pour $a = 1/2$.

$$\Pi_{[-1/2,\,1/2]} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

C - Application : EDP :

Exemple.

on considère le (pb) suivant :

$$(pb) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on suppose que u et toute des dérivées partielles admet des T.F en espace à tout instant t

1/ Donner l'équation diff satisfaite par la T.F partielle.

$$\hat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

2/ En déduire $u(x,t)$.

réponse :

on a.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)(\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t).$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)(\xi) = (2i\pi x)^2 \hat{u}(\xi,t).$$

Alors $\hat{u}(\xi,t)$ vérifie l'eq diff :

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) - \frac{1}{2}(2i\pi x)^2 \hat{u}(\xi,t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) + 2\pi^2 x^2 \hat{u}(\xi,t) = 0.$$

$\Rightarrow \hat{u}(\xi,t)$ vérifie l'équation.

$$y'(t) + 2\pi^2 x^2 y(t) = 0.$$

$$\hat{u}(\xi,t) = A\, e^{-\int 2\pi^2 x^2 \xi\, dt}$$

$$= A\, e^{-2\pi^2 x^2 \xi t}$$

$$= A\, e^{-2\pi^2 x^2 t}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) - \frac{1}{2}(2i\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) + 2\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0.$$

$$\hat{u}(\xi,t) = A\, e^{-\int 2\pi^2 \xi^2 dt}$$

$$= A\, e^{-2\pi^2 \xi^2 t}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

* Déterminer A :

$$u(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{F}(u(x,0))(\xi)$$

$$= \mathcal{F}(\varphi(x))(\xi).$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi).$$

D'autre part $\hat{u}(\xi,0) = A$.

Donc $A = \hat{\varphi}(\xi)$.

Alors

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)\, e^{-2\pi^2 \xi^2 t}.$$

Scanned with CamScanner

Déterminer $u(x,t) = ?$

on a $\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)\, e^{-2\pi^2 \xi^2 t}$

$\Rightarrow u(x,t) = \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi^2\xi^2 t}\right)$

Rappel :

$f(t) = e^{-at^2}$

$\mathcal{F}(f(t))(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}x^2}$

- $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi^2\xi^2 t}\right)$

$= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1/\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2t}}}\, e^{-\frac{\pi^2}{\frac{1}{2t}}\xi^2}\right)$.

$= \frac{1}{\sqrt{2t\pi}}\, e^{-\frac{1}{2t}x^2}$.

$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi^2\xi^2 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}}\, e^{-\frac{1}{2t}x^2}$

Donc :

$u(x,t) = \varphi(x) * \frac{1}{\sqrt{2t\pi}}\, e^{-\frac{1}{2t}x^2}$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2t\pi}}\, e^{-\frac{1}{2t}y^2} \varphi(x-y)\, dy$.

Ex 2 : (equation des ondes)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

avec $c \neq 0$.

$u_0, v_0 \in S(\mathbb{R})$.

u et toutes ses dérivées partielles admettent des T.F par rapport à x à tout instant t.

* on définit la transformée de Fourier partielle de u par rapport à x par :

$\hat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(\xi)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx$

1/

$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right)(\xi)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx$.

$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t)$

- $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right)(\xi) = (2i\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi,t)$

Alors on obtient :

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) - c^2(2i\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi,t) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) + (2\pi\xi c)^2 \hat{u}(x,t) = 0$.

$y''(t) + (2\pi\xi c)^2 y(t) = 0$.

$\Rightarrow$ éq diff d'ordre 2 homogène

(2)

Éc : $r^2 + (2\pi c\xi)^2 = 0$.

$r^2 = -(2\pi c\xi)^2$.

$\Rightarrow r = \pm i(2\pi c\xi)$

Scanned with CamScanner

variable ξ est :

Alors $\hat{u}(\xi,t) = A\cos(2\pi c\xi t) + B\sin(2\pi c\xi t)$

$A, B \in \mathbb{R}$.

③ Déterminer A et B ?

$u(x,0) = u_0(x)$

$\Rightarrow \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi)$

or $\hat{u}(\xi,0) = A \Rightarrow A = \hat{u}_0(\xi)$

• $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$.

$\Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \hat{v}_0(\xi)$

or on a :

$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = -(A 2\pi\xi c)\sin(2\pi c\xi t) + B\, 2\pi\xi c \cos(2\pi c\xi t)$.

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,0) = B\, 2\pi\xi c = \hat{v}_0(\xi)$.

$\Rightarrow B = \frac{\hat{v}_0(\xi)}{2\pi\xi c}$

Alors :

$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)\cos(2\pi c\xi t) + \hat{v}_0(\xi)\frac{\sin(2\pi c\xi t)}{2\pi c\xi}$.

④ Déterminer $u(x,t)$?

$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)\cos(2\pi c\xi t) + \hat{v}_0(\xi)\frac{\sin(2\pi c\xi t)}{2\pi c\xi}$

or on a

* $F(\delta_a) = e^{-2i\pi a x}$

en effet

$\langle F(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \varphi(x) \rangle$

$= \varphi(a)$.

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-2i\pi t a}\, dt$.

$= \langle e^{-2i\pi a x}, \varphi \rangle$.

$\Rightarrow F\left(\frac{\delta_a + \delta_{-a}}{2}\right) = \cos(2\pi a x)$.

$\Leftrightarrow F^{-1}(\cos 2\pi a x) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$

Alors

$F^{-1}(\cos(2\pi c\xi t)) = \frac{1}{2}(\delta_{ct} + \delta_{-ct})$

* $F(\mathbb{1}_{[-a,a]})(\xi) = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$.

$\Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}\right) = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

Alors

$F^{-1}\left(\frac{\sin(2\pi c\xi t)}{2\pi c\xi t}\right)(y)$

$= \frac{1}{2c} F^{-1}\left(\frac{\sin(2\pi c t\xi)}{\pi\xi}\right)$

$= \frac{1}{2c}\mathbb{1}_{[-ct,ct]}(y)$

Scanned with CamScanner

Donc

$$u(x,t) = v_0(x) * F^{-1}\left(\cos(2\pi c t \xi)\right) + v_0(x) * F^{-1}\left(\frac{\sin(2\pi c t \xi)}{\pi \xi}\right) \quad (*)$$

$$= v_0(x) * \frac{1}{2}(\delta_{ct} + \delta_{-ct}) + v_0 * \frac{1}{2c}\left(1\!\!1_{[-ct,ct]}\right)$$

$$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T$$

$$\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle T * \delta_a, \varphi \rangle$$

$$= \langle T_x, \langle \delta_a, y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \langle T_x, \varphi(x+a) \rangle$$

$$= \langle T_x, \tau_a \varphi \rangle$$

$$= \langle \tau_0 T, \varphi \rangle$$

En particulier :

- $v_0 * \delta_{ct} = \tau_{ct} v_0 = v_0(x-ct)$

* $v_0 * \delta_{-ct} = \tau_{-ct} v_0 = v_0(x+ct)$

Alors

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\tau_{ct} v_0 + \tau_{ct} v_0) + \frac{1}{2c} v_0 * 1\!\!1_{[-ct,ct]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[v_0(x-ct) + v_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} v_0(x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[v_0(x-ct) + v_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(z)\,dz.$$

$$z = x - y \quad \overset{x=ct}{\Rightarrow} \quad z = x+ct.$$

$$dz = -dy \quad y = ct \quad z = x-ct$$

bsl.warda@gmail.com

Scanned with CamScanner